HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	

Tekijä — Författare — Author
Nonna Laeslehto

Työn nimi — Arbetets titel — Title
Ryhmälaajennuksista sekä suorista ja puolisuorista tuloista

Oppiaine — Läroämne — Subject
Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Kesäkuu 2018	34 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tämän Pro gradu -tutkielman tarkoituksena on esitellä algebran osa-alueeseen, ryhmäteoriaan kuuluvia ryhmälaajennuksia sekä suoria ja puolisuoria tuloja.

Tutkielma alkaa johdannolla, jossa kerrotaan yleisesti ryhmälaajennuksesta sekä sen historiasta ja käyttökohteista. Toisessa kappaleessa esitellään tutkielman ymmärtämiseksi tarvittavat esitiedot ja määritelmät, jotka ovat tunnettuja kurssista Algebra I. Tämän jälkeen kappaleessa kolme siirrytään käsittelemään ensin sisäisiä ja ulkoisia suoria tuloja. Tässä kappaleessa käydään lisäksi läpi esimerkki sisäisestä suorasta tulosta sekä esitellään sisäiseen suoraan tuloon liittyviä lauseita ja tuloksia.

Kappaleessa neljä siirrytään käsittelemään sisäisiä ja ulkoisia puolisuoria tuloja, jotka ovat suorien tulojen yleistyksiä. Aluksi käydään läpi sisäinen puolisuora tulo sekä esimerkki tällaisesta tulosta. Sitten määritellään ulkoinen puolisuora tulo ja osoitetaan, että kyseessä on ryhmä. Myöhemmin tässä kappaleessa esitellään lisää puolisuoria tuloja havainnollistavia esimerkkejä sekä käydään läpi puolisuoriin tuloihin liittyviä lauseita. Kappaleen neljä lopussa käydään vielä läpi ulkoisen ja sisäisen puolisuoran tulon yhteys. Tämän jälkeen kappaleessa viisi tiivistetään aiemmin saadut tulokset yhteen käsittelemällä ulkoisten ja sisäisten suorien ja puolisuorien tulojen yhteyksiä toisiinsa.

Kappaleessa kuusi esitellään lyhyt eksakti jono, joka on välttämätön ryhmälaajennuksen käsittelemiseksi. Tämän jälkeen kappaleessa seitsemän esitellään ryhmälaajennus sekä yhtenä yleisenä esimerkkinä ulkoinen puolisuora tulo ryhmälaajennuksena. Samassa kappaleessa käydään vielä läpi ryhmälaajennukseen liittyviä lauseita, joissa osoitetaan muunmuassa, että ryhmälaajennuksen avulla voidaan määritellä isomorfia sisäisen ja ulkoisen puolisuoran tulon välille. Tärkeimpänä tuloksena huomataan, että jos ryhmä G on isomorfinen ulkoisen puolisuoran tulon $N \rtimes_\theta H$ kanssa, niin tekijäryhmä G/N on isomorfinen ryhmän H kanssa. Kappaleen seitsemän lopussa vielä esitellään esimerkkejä ryhmälaajennuksesta, kuten säännöllisen monikulmion symmetriaryhmä D_n.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Algebra, Ryhmäteoria, Ryhmälaajennus, Suora tulo, Puolisuora tulo

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Pro gradu -tutkielma

Ryhmälaajennuksista sekä suorista ja puolisuorista tuloista

Nonna Laeslehto
013664381

Ohjaaja: Erik Elfving

20.5.2018

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Algebran keskeisimpiin osa-alueisiin kuuluva ryhmäteoria tutkii algebran perusrakenteisiin kuuluvia ryhmiä ja näiden toimintaa. Ryhmälaajennukset sekä suorat ja puolisuorat tulot antavat erään tavan käsitellä ryhmiä ja ovat siten osa ryhmäteoriaa. Jos on annettu ryhmä G ja tämän normaali aliryhmä N, niin näistä voimme muodostaa tekijäryhmän G/N, jolloin voidaan tutkia ryhmän G ominaisuuksia tämän tekijäryhmän ominaisuuksien kautta. Ryhmälaajennus taas on tähän verrattuna käänteinen ongelma. Jos on annettu ryhmät K ja H, niin ryhmälaajennus tutkii sitä, mitä kaikkia ryhmiä G näistä kahdesta voidaan muodostaa. Tällä tavalla muodostettuja ryhmiä G kutsutaan ryhmän K laajennukseksi ryhmällä H, ja niille pätee $G/K \cong H$.

Laajennusongelma pyrkii vastaamaan juuri tähän kysymykseen, eli mitä kaikkia ryhmiä G voidaan muodostaa kahden muun ryhmän avulla? Ryhmälaajennusta käyttäen on esimerkiksi luokiteltu kaikki äärelliset yksinkertaiset ryhmät 1950-luvulta eteenpäin. Jos laajennusongelma pystyttäisiin ratkaisemaan kokonaan, niin sen avulla pystyttäisiin luokittelemaan kaikki äärelliset ryhmät.

Ryhmälaajennusta käytetään abstraktin algebran lisäksi esimerkiksi lineaarialgebrassa. Lisäksi ryhmälaajennus on tärkeä osa Lie-algebraa, jonka sovelluksilla on osansa kvanttimekaniikassa sekä Fourier'n muunnoksissa.

Tämän tutkielman ensimmäisessä kappaleessa esitellään tarvittavat esitiedot ja määritelmät, jotka ovat tunnettuja kurssista Algebra I. Tämän jälkeen kappaleessa kolme siirrytään käsittelemään ensin sisäisiä ja ulkoisia suoria tuloja, ja sitten kappaleessa neljä näiden tulojen yleistyksiä, eli sisäisiä ja ulkoisia puolisuoria tuloja. Nämä eri tulot ovat välttämättömiä käsitteitä ryhmälaajennuksen ymmärtämiseksi. Tarkemmin sanottuna jokainen puolisuora tulo itsessään on ryhmälaajennus.

Kappaleessa kuusi, ennen itse ryhmälaajennuksen tutkimusta, esitellään lyhyt eksakti jono, koska jokainen ryhmälaajennus esitetään lyhyen eksaktin jonon kautta. Lyhyt eksakti jono koostuu ryhmistä sekä näiden välisistä homomorfisista kuvauksista. Tämän jälkeen kappaleessa 7 esitellään itse ryhmälaajennus sekä yhtenä yleisenä esimerkkinä ulkoinen puolisuora tulo ryhmälaajennuksena. Samassa kappaleessa käydään vielä läpi ryhmälaajennukseen liittyviä lauseita, joissa osoitetaan, että ryhmälaajennuksen avulla voidaan määritellä isomorfia sisäisen ja ulkoisen puolisuoran tulon välille. Tärkeimpänä tuloksena huomataan, että jos ryhmä G on isomorfinen ulkoisen puolisuoran tulon $N \rtimes_\theta H$ kanssa, niin tekijäryhmä G/N on isomorfinen ryhmän H kanssa. Lopuksi esitellään esimerkkejä ryhmälaajennuksesta, kuten säännöllisen monikulmion symmetriaryhmä D_n.

Luku 2

Tarvittavat määritelmät

Tässä kappaleessa esittelemme ryhmäteoriasta tarvittavat esitiedot ryhmälaajennusta varten.

Algebran peruskäsitteisiin kuuluva ryhmä on laskutoimituksella varustettu joukko. Joukon on oltava laskutoimituksen suhteen suljettu, eli laskutoimituksen tuloksen tulee kuulua samaan joukkoon. Lisäksi ryhmässä laskutoimituksen tulee olle liitännäinen, sillä on oltava neutraalialkio ja lisäksi kaikilla joukon alkiolla tulee olla käänteisalkio laskutoimituksen suhteen.

Määritelmä 2.1. Olkoon G epätyhjä joukko. Paria $(G, \circ)$ sanotaan *ryhmäksi*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

G0. $\circ$ on joukossa G määritelty laskutoimitus, ts. $a \circ b \in G$ kaikilla $a, b \in G$;

G1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ kaikilla $a, b, c \in G$;

G2. on olemassa sellainen G:n alkio e, että $e \circ a = a \circ e$ kaikilla $a \in G$;

G3. jokaista G:n alkiota a kohti on olemassa sellainen G:n alkio a^{-1}, että $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. [2] [3]

Jos laskutoimitus on myös kommutatiivinen eli vaihdannainen, sanotaan, että $(G, \circ)$ on *vaihdannainen ryhmä* eli *Abelin ryhmä*; se täyttää ehdon

G4. $a \circ b = b \circ a$ kaikilla $a, b \in G$.

Yksi esimerkki ryhmästä on $(\mathbb{Z}, +)$, eli kokonaislukujen joukko, joka on varustettu yhteenlaskulla. Kyseiselle ryhmälle pätee myös ehto G4, joten kyseessä on Abelin ryhmä.

Ryhmälaajennukseen kuuluu tärkeänä osana ryhmän erityinen osajoukko, jota kutsutaan aliryhmäksi.

Määritelmä 2.2. Olkoon G ryhmä. Jos $H \subseteq G$ ja H on ryhmä G:n laskutoimituksen suhteen, sanotaan, että H on G:n *aliryhmä*. Aliryhmästä käytetään merkintää $H \leqslant G$. [2] [3]

Ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ triviaalit aliryhmät ovat ryhmä itse sekä $\{1\}$, mutta esimerkiksi myös parillisten lukujen joukko yhteenlaskulla varustettuna $(\{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}, +)$ on kyseisen ryhmän aliryhmä.

Seuraavaksi käymme läpi ryhmän osajoukosta laajennetun käsitteen, jota tarvitsemme erityisen aliryhmän määrittämisessä.

Määritelmä 2.3. Olkoon H ryhmän G aliryhmä. Ryhmän G kukin alkioon a liittyvä osajoukko

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

on aliryhmän H:n vasen *sivuluokka* G:ssä. Alkiota a kutsutaan sivuluokan edustajaksi. Vastaavasti määritetään oikea sivuluokka Ha. Vasempien sivuluokkien joukolle $\{aH \mid a \in G\}$ käytetään merkintää G/H. [2] [3]

Triviaalisti aliryhmä H on itse yksi sivuluokista, koska $H = eH$. Ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmän $n\mathbb{Z}$ vasemmat sivuluokat ovat jäännösluokat modulo n. Esimerkiksi sivuluokka $k + n\mathbb{Z}$ on jäännösluokka $[k]_n$. Sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on jäännösluokkien joukko $\mathbb{Z}_n$.

Jonkin ryhmän aliryhmien sivuluokkia tarkastelemalla voidaan löytää aliryhmän erikoistapauksen, normaalin aliryhmän.

Määritelmä 2.4. Ryhmän G aliryhmä N on *normaali*, jos sen vasemmat ja oikeat sivuluokat yhtyvät, ts $gN = Ng$ kaikilla $g \in G$. Normaalista aliryhmästä käytetään merkintää $N \lhd G$. [2] [3]

Koska ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on vaihdannainen, niin kaikki sen aliryhmät ovat normaaleja.

Kaikki kuvaukset liittävät jokaiseen lähtöjoukon alkioon yksikäsitteisen maalijoukon alkion. Kuvausten yleinen määritelmä ei kuitenkaan aseta ehtoja sille, kuinka moni alkio kuvautuu kullekin maalijoukon alkiolle. Kuvauksille on oma terminologiansa, jota esitellään seuraavaksi. [2] [3]

- Oletetaan, että $f : A \to B$ on kuvaus. Kuvauksen f *kuva* Imf koostuu kaikista niistä joukon B alkioista, jotka ovat jonkin A:n alkion kuvia. Toisin sanoen

$$Imf = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

- Kuvaus $f : A \to B$ on *injektiivinen* tai *injektio*, jos eri alkioilla on aina eri kuvat. Toisin sanoen kaikilla $a, b \in A$ ehdosta $f(a) = f(b)$ seuraa $a = b$. Tämä voidaan myös kirjoittaa siten, että kaikilla $a, b \in A$ ehdosta $a \neq b$ seuraa $f(a) \neq f(b)$. Eli kullekin maalijoukon alkiolle kuvautuu korkeintaan yksi lähtöjoukon alkio.

- Kuvaus $f : A \to B$ on *surjektiivinen* tai *surjektio*, jos jokaiselle joukon B alkiolle kuvautuu jokin A:n alkio. Toisin sanoen $Imf = B$. Surjektiossa jokaiselle maalijoukon B alkiolle kuvautuu vähintään yksi lähtöjoukon A alkio.

- Kuvaus f on *bijektiivinen* tai *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio. Tällöin jokaiselle maalijoukon B alkiolle kuvautuu täsmällen yksi lähtöjoukon A alkio, ja jokaisella B:n alkiolla b on yksikäsitteinen alkukuva a lähtöjoukossa A. [2] [3]

Edellisiä kuvauksen määritelmiä tarvitaan kun lähdetään tutkimaan ryhmien välisiä kuvauksia ja vertaamaan ryhmiä keskenään.

Määritelmä 2.5. Olkoot $(G.\cdot)$ ja $(H,*)$ ryhmiä. Kuvausta $f : G \to H$ sanotaan *ryhmähomomorfismiksi*, jos se toteuttaa homomorfiaehdon [2] [3]

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b) \ \forall \ a, b \in G.$$

Ryhmähomomorfismista käytetään yleensä lyhyempää nimeä homomorfismi. Triviaalina esimerkkinä homomorfismista on identiteettikuvaus $f : G \to G$. Myös esimerkiksi kuvaus $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2$ on homomorfismi, koska $f(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = f(x)f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^*$.

Ryhmän G homomorfinen kuva Imf säilyttää alkuperäisen ryhmän piirteitä, mutta jos useampia ryhmän alkioita kuvautuu samaksi maalijoukon alkioksi, niin sitä enemmän homomorfinen kuvaus hävittää ryhmän G ominaisuuksia. Jos kuitenkin kuvaus f on bijektiivinen, niin jokaiselle maalijoukon alkiolle kuvautuu vain tasan yksi lähtöjoukon alkio. Tällöin ryhmän ominaisuudet säilyvät.

Määritelmä 2.6. Ryhmähomomorfismia $f : G \to H$ sanotaan *(ryhmä)isomorfismiksi*, jos kuvaus f on bijektiivinen. Ryhmää G sanotaan ryhmän H kanssa isomorfiseksi, jos on olemassa jokin isomorfismi $f : G \to H$. Isomorfisuudesta käytetään merkintää $G \cong H$. [2] [3]

Esimerkkinä isomorfisesta kuvauksesta on $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = ln\, x$, eli $(\mathbb{R}_+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$. Triviaalisti identtinen kuvaus ryhmältä itselleen, joka säilyttää alkiot samana, on isomorfismi.

Määritelmä 2.7. Isomorfismia $f : G \to G$ ryhmältä itselleen kutsutaan *automorfismiksi*. [2] [3]

Ryhmähomomorfismiin liittyy vielä lopuksi ytimen käsite, joka on tärkeä osa ryhmälaajennusta ja sen määritelmää.

Määritelmä 2.8. Ryhmähomomorfismin $f : G \to H$ *ydin* $Ker(f)$ koostuu niistä alkioista, jotka kuvautuvat neutraalialkiolle [2] [3]:

$$Ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}.$$

Jos halutaan tutkia injektiivisiä homomorfismeja, niin seuraava lause on tähän kätevä.

Lause 2.9. *Olkoon $f : G \to H$ ryhmähomomorfismi. Kuvaus f on injektiivinen, jos ja vain jos $Ker f = \{e_G\}$. [2] [3]*

Tämän todistus käydään läpi Algebra I:ssä, joten sitä ei esitetä tässä.

Luku 3

Sisäinen ja ulkoinen suora tulo

3.1 Ulkoinen suora tulo

Jos G ja H ovat mitkä tahansa kaksi ryhmää, niin näiden karteesinen tulo $G \times H$ muodostaa luonnollisesti ryhmän.

Lause 3.1. *Olkoot $(G, \circ)$ ja $(H, \cdot)$ ryhmiä. Määritellään karteesinen tulo $G \times H$ laskutoimitus seuraavasti*

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \cdot h_2).$$

Tällöin $G \times H$ on ryhmä. [2] [3]

Tämän lauseen todistus käydään läpi Algebra I:ssä. Yleisin esimerkki karteesisesta tulosta on taso R^2. Karteesisen tulon avulla määritellään ulkoinen suora tulo.

Määritelmä 3.2. Olkoon G ja H mitä tahansa ryhmiä. *Ulkoinen suora tulo* on näiden kahden ryhmän karteesinen tulo $G \times H$. [8]

Kahden mielivaltaisen ryhmän lisäksi voimme myös muodostaa kahden aliryhmän tulon. Oletetaan, että G on ryhmä ja H ja K ovat sen aliryhmiä. Tällöin aliryhmien tulo määritellään seuraavasti

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}.$$

Kahden aliryhmän H ja K tulo HK on myös G:n osajoukko, mutta se ei välttämättä ole G:n aliryhmä.

Lause 3.3. *Ryhmän G kahden aliryhmän H ja K tulo HK on G:n aliryhmä, jos ja vain jos $HK = KH$.*

Todistus. Oletetaan, että ryhmällä G on kaksi aliryhmää H ja K.

(i) Todistetaan ensiksi, että jos aliryhmien tulo HK on G:n aliryhmä, niin silloin $HK = KH$. Oletetaan siis, että HK on G:n aliryhmä. Ensimmäisenä havaitaan, että sekä H että K ovat tulon HK osajoukkoja, koska H:n kaikki alkiot voidaan kirjoittaa muodossa he, jollain $h \in H$, ja K:n kaikki alkiot muodossa ek, jollain $k \in K$. Sekä H että K sisältävät ryhmän G n eutraalialkion e, koska ne ovat G:n aliryhmiä. Koska tulo HK on ryhmän G aliryhmä, niin tästä seuraa, että tulo KH on itseasiassa tulon HK osajoukko.

Seuraavaksi lähdetään tutkimaan aliryhmän HK alkiota h_1k_1. Koska aliryhmä HK on myös itsessään ryhmä, niin tälle alkiolle on olemassa käänteisalkio. Tämä käänteisalkio on muotoa $k_1^{-1}h_1^{-1} \in HK$, koska tällöin pätee $(h_1k_1)(k_1^{-1}h_1^{-1}) = h_1eh_1^{-1} = e$ sekä $(k_1^{-1}h_1^{-1})(h_1k_1) = k_1^{-1}ek_1 = e$. Koska tämä käänteisalkio $k_1^{-1}h_1^{-1}$ on myös aliryhmän HK alkio, niin se voidaan kirjoittaa muodossa h_2k_2 joillain $h_2 \in H$ ja $k_2 \in K$. Tämän alkion h_2k_2 käänteisalkio taas on alkuperäinen alkio h_1k_1, joten $h_1k_1 = (h_2k_2)^{-1}$. Tämä voidaan kirjoittaa myös seuraavassa muodossa: $h_1k_1 = k_2^{-1}h_2^{-1}$. Huomataan, että $k_2^{-1}h_2^{-1}$ on itseasiassa alkio tulossa KH. Tästä seuraa, että HK on tulon KH osajoukko.

Nyt, koska sekä $KH \subset HK$ että $HK \subset KH$, niin $HK = KH$.

(ii) Seuraavaksi todistetaan, että jos $HK = KH$, niin HK on ryhmän G aliryhmä. Oletetaan, että $HK = KH$. Koska sekä H että K ovat ryhmän G aliryhmiä, niin näiden tulo HK on epätyhjä ja on G:n osajoukko, sillä tulossa on vähintään neutraalialkio. Seuraavaksi todistetaan ryhmän ehdot G0-G3 joukolle HK.

G0. Oletetaan, että h_1k_1 ja $h_2k_2 \in HK$. Nyt $(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1k_1h_2k_2$. Koska $k_1h_2 \in KH = HK$, niin on olemassa $k' \in K$ ja $h' \in H$ siten, että $k_1h_2 = h'k'$. Nyt alkioiden tulo voidaan kirjoittaa muodossa $h_1k_1h_2k_2 = h_1h'k'k_2$, ja tämä kuuluu joukkoon HK, joten kyseessä on tässä joukossa määritelty laskutoimitus.

G1. Koska H ja K ovat G:n aliryhmiä, niin G:n laskutoimituksen liitännäisyyden vuoksi pätee $(h_1k_1h_2k_2)h_3k_3 = h_1k_1(h_2k_2h_3k_3)$ kaikilla $h_1, h_2, h_3 \in H$ ja $k_1, k_2, k_3 \in K$ Näin ollen myös joukon HK laskutoimitus on liitännäinen.

G2. Koska G:n neutraalialkio $e \in H$ ja $\in K$, niin joukon HK neutraalialkio on $ee = e$.

G3. Joukon HK alkion hk käänteisalkio on $k^{-1}h^{-1}$, sillä $hkk^{-1}h^{-1} = heh^{-1} = hh^{-1} = e$. Koska $HK = KH$, niin $k^{-1}h^{-1} \in HK$.

Näin ollen HK on ryhmä, ja koska aiemmin todettiin, että se on ryhmän G osajoukko, niin se on myös tämän aliryhmä.

Nyt on todistettu, että jos ryhmän G aliryhmien H ja K tulo on aliryhmä, niin $HK = KH$. Lisäksi on todistettu, että jos $HK = KH$, niin aliryhmien tulo HK on ryhmän G aliryhmä. Näin ollen aliryhmien tulo HK on itse aliryhmä, jos ja vain jos $HK = KH$.

$\square$

Jos ryhmä G on Abelin ryhmä, niin luonnollisesti $HK = KH$. Lisäksi, koska jokinen syklinen ryhmä on Abelin ryhmä, niin tämä pätee myös syklisillä ryhmillä.

Tarkastellaan seuraavaksi tätä aliryhmien tuloa erikoistilanteessa.

3.2 Sisäinen suora tulo

Määritelmä 3.4. Olkoon G ryhmä ja H ja K sen normaaleja aliryhmiä. Oletetaan, että $H \cap K = \{e\}$ ja $G = HK$. Tällöin G:tä kutsutaan *sisäiseksi suoraksi tuloksi.* [8]

Esimerkiksi Kleinin neliryhmä V on kahden normaalin aliryhmänsä sisäinen suora tulo. Kleinin neliryhmä on neljän alkion Abelin ryhmä, jossa jokainen alkio on oma käänteisalkionsa. Jos merkitään Kleinin neliryhmän alkioita $V = \{e, a, b, c\}$, niin tällöin kaksi aliryhmää ovat $H = \{e, a\}$ ja $K = \{e, b\}$. Koska kyseessä on Abelin ryhmä, niin tämän kaikki aliryhmät ovat normaaleita. Tässä tapauksessa selvästi pätee, että $H \cap K = \{e\}$, joten täytyy enää osoittaa, että $HK = V$. Tämä on nopea tarkistaa aliryhmien alkioilla:

$$ee = e$$

$$ae = a$$

$$eb = b$$

$$ab = c.$$

Näin ollen normaalien aliryhmien H ja K alkioista saadaan muodostettua koko Kleinin neliryhmä ja $HK = V$, joten kyseessä on sisäinen suora tulo.

Sisäisellä ja ulkoisella suoralla tulolla on yhteys, mutta sitä varten tarvitsemme seuraavaa lemmaa sisäiseen suoraan tuloon liittyen.

Lemma 3.5. *Jos G on aliryhmiensä H ja K sisäinen suora tulo, niin seuraavat asiat pätevät:*
(i) Jos $h_1k_1 = h_2k_2$, missä $h_1, h_2 \in H$ ja $k_1, k_2 \in K$, niin $h_1 = h_2$ ja $k_1 = k_2$.
(ii) Jos $h \in H$ ja $k \in K$, niin $hk = kh$. [8]

Todistus. Oletetaan, että G on aliryhmiensä H ja K sisäinen suora tulo, eli H ja K ovat normaaleja aliryhmiä, $G = HK$ sekä lisäksi $H \cap K = \{e\}$.
(i) Oletetaan, että $h_1k_1 = h_2k_2$, missä $h_1, h_2 \in H$ ja $k_1, k_2 \in K$. Nyt $h_1k_1 = h_2k_2$ voidaan kirjoittaa muotoon $h_1^{-1}(h_1k_1)k_2^{-1} = h_1^{-1}(h_2k_2)k_2^{-1}$. Koska H ja K ovat aliryhmiä, niin tämän voi edelleen ilmaista muodossa $k_1k_2^{-1} = h_1^{-1}h_2$. Nyt huomataan, että yhtälön oikea puoli $k_1k_2^{-1} \in K$ ja yhtälön vasen puoli $h_1^{-1}h_2 \in H$. Näin ollen molemmat alkiot $k_1k_2^{-1}$ ja $h_1^{-1}h_2$ kuuluvat H:n ja K:n leikkaukseen $H \cap K$. Koska tämä leikkaus on vain neutraalialkion sisältämä joukko $\{e\}$, niin siitä seuraa, että $k_1k_2^{-1} = e$ ja $h_1^{-1}h_2 = e$. Tästä seuraa edelleen, että $k_1 = k_2$ ja $h_1 = h_2$.

(ii) Oletetaan, että $h \in H$ ja $k \in K$. Tutkitaan ensin alkiota $kh^{-1}k^{-1}$, ja huomataan, että $kh^{-1}k^{-1} \in kHk^{-1}$, ja koska H on normaali aliryhmä, niin kHk^{-1} on itseasiassa H:n osajoukko. Näin ollen $kh^{-1}k^{-1} \in H$, mistä taas seuraa, että $h(kh^{-1}k^{-1}) \in H$. Samanlainen päättelyketju voidaan todeta, kun tutkitaan alkiota $hkh^{-1} \in hKh^{-1}$. Ja koska myös K on normaali, niin siitä seuraa, että hKh^{-1} on K:n osajoukko, ja siten $hkh^{-1} \in K$. Tästä seuraa edelleen, että $(hkh^{-1})k^{-1} \in K$. Näin ollen $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$, eli $hkh^{-1}k^{-1} = e$. Tästä taas seuraa, että $hk = kh$. □

Nyt tämän lemman avulla saadaan todistettua seuraava lause, joka selventää sisäisen ja ulkoisen suoran tulon yhtyden.

Lause 3.6. *Jos G on aliryhmiensä K ja H sisäinen suora tulo, niin G on isomorfinen näiden ulkoisen suoran tulon kanssa, eli $G \cong H \times K$. [8]*

Todistus. Oletetaan, että G on normaalien aliryhmiensä H:n ja K:n sisäinen suora tulo. Tällöin pätee, että $G = HK$ ja $H \cap K = \{e\}$. Olkoon $f : H \times K \to HK$ ja $f(h, k) = hk$, joillain $h \in H$ ja $k \in K$. Oletetaan, että $h_1, h_2 \in H$ ja $k_1, k_2 \in K$.

Nyt $f((h_1, k_1)(h_2, k_2))$ on ulkoisen suoran tulon määritelmän mukaan $f((h_1h_2, k_1k_2))$, josta taas kuvauksen määrittelyn perusteella saadaan $(h_1h_2)(k_1k_2)$. Koska alkiot kommutoivat, niin tämä voidaan kirjoittaa muodossa $(h_1k_1)(h_2k_2)$, joka kuvauksen määritelmän mukaan on $f(h_1, k_1)f(h_2, k_2)$. Näin ollen $f((h_1, k_1)(h_2, k_2)) = f(h_1, k_1)f(h_2, k_2)$ ja kuvaus on homomorfismi.

Seuraavaksi todistetaan, että kuvaus on myös bijektio. Kuvaus f on triviaalisti surjektio, koska näin määritettynä kuva on koko maalijoukko HK. Lauseen 2.13 mukaisesti homomorfismi on injektio, jos ja vain jos kuvauksen ydin on lähtöjoukon neutraalialkio, joten tarkastellaan seuraavaksi ydintä. Ydin on määritelmän mukaan $Kerf = \{(h, k) \mid f(h, k) = (e, e)\}$. Koska $f(h, k) = hk$, niin tästä saadaan $hk = e$, joka voidaan vielä kirjoittaa muodossa $hk = ee$. Nyt lemman 3.5 kohdan *(i)* mukaan $h = e$ ja $k = e$, eli saadaan $Kerf = \{e, e\}$. Nyt koska kuvauksen f ydin on lähtöjoukon neutraalialkio, niin kuvaus on surjektiivisuuden lisäksi injektiivinen. Näin ollen kuvaus f on bijektiivinen, ja koska aiemmin todistimme sen myös homomorfismiksi, niin kyseessä on isomorfia $HK \cong H \times K$, tai toisin kirjoitettuna $G \cong H \times K$. □

Luku 4

Sisäinen ja ulkoinen puolisuora tulo

Aiemmin todettiin, että jos G ja H ovat ryhmiä, niin näiden ulkoinen suora tulo $G \times H$ määritellään seuraavasti

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \cdot h_2).$$

Tästä voimme huomata, että muodostuu neljä homomorfista kuvausta:

$$\iota_G : G \to G \times H, \qquad g \mapsto (g, e_H)$$

$$\iota_H : H \to G \times H, \qquad h \mapsto (e_G, h)$$

$$\pi_G : G \times H \to G, \qquad (g, h) \mapsto g$$

$$\pi_H : G \times H \to H, \qquad (g, h) \mapsto h.$$

Näistä kuvauksista taas huomataan, että Im (ι_G) = Ker (π_H), Im (ι_H) = Ker (π_G), $\pi_G \circ \iota_G = Id_G$ ja $\pi_H \circ \iota_H = Id_H$. Näiden pohjalta taas havaitaan seuraavat isomorfiat

$$G \cong Im(\iota_G) = Ker(\pi_H) =: \widetilde{G}$$

$$H \cong Im(\iota_H) = Ker(\pi_G) =: \widetilde{H}.$$

Yllä olevista $Ker(\pi_H)$ ja $Ker(\pi_G)$ ovat tuloryhmän $G \times H$ normaaleja aliryhmiä. Nyt myös huomataan, että näin määriteltyjen $\widetilde{G}$ ja $\widetilde{H}$ leikkaus on saman tuloryhmän neutraalialkio: $\widetilde{G} \cap \widetilde{H} = (e_G, e_H)$. Lisäksi $\widetilde{G}$ ja $\widetilde{H}$ tulo on koko tuloryhmä: $\widetilde{G}\widetilde{H} = G \times H$.

Nyt tämä ryhmä ja näin muodostetut aliryhmät alkavat vastata sisäisen suoran tulon määritelmän vaatimuksiin. Käytetäänkin nyt tätä motivaationa puolisuoriin tuloihin, joista ensimmäisenä esitellään sisäinen puolisuora tulo.

4.1 Sisäinen puolisuora tulo

Määritelmä 4.1. Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmät N ja H siten, että $NH = G$ ja $N \cap H = \{e\}$. Jos N on normaali aliryhmä, niin G on N:n ja H:n *sisäinen puolisuora tulo*. Tästä käytetään merkintää $G = N \rtimes H$. [6]

Jos myös H on normaali aliryhmä, niin kyseessä on sisäinen suora tulo, kuten edellisessä kappaleessa määriteltiin. Yksinkertainen esimerkki sisäisestä suorasta tulosta on syklinen ryhmä $C_6 = \langle g \rangle$, jolla on normaalina aliryhmänä kertalukua kolme oleva syklinen ryhmä $C_3 = \langle g^2 \rangle = \{e, g^2, g^4\}$. [9] Toisena aliryhmänä on $C_2 = \langle g^3 \rangle = \{e, g^3\}$, jolloin selvästi kahden aliryhmän yhdiste on vain neutraalialkio e. Koko syklinen ryhmä C_6 saadaan muodostettua näiden aliryhmien tulona, koska

$$
\begin{aligned}
ee &= e \\
g^3 e &= g^3 \\
eg^2 &= g^2 \\
g^3 g^2 &= g^5 \\
eg^4 &= g^4 \\
g^3 g^4 &= g.
\end{aligned}
$$

Näin ollen $C_3 C_2 = C_6$ ja kyseinen syklinen ryhmä on sisäinen suora tulo.

Kolmion symmetriaryhmä D_3 taas on sisäinen puolisuora tulo. Tämä ryhmä koostuu kolmion kierroista ρ ja peilauksista σ, jolloin laskutoimituksena on näiden kuvausten yhdistäminen. Neutraalialkiona on 0 asteen kierto, joka pitää kolmion paikallaan. Myös tämän ryhmän normaalina aliryhmänä on C_3, mutta nyt tämä ryhmä koostuu kaikista kierroista. Toisena aliryhmänä on samaan tapaan C_2, mutta tämä ryhmä koostuu neutraalialkiosta sekä yhdestä peilauksesta. [9]

Samaan tapaan kuin edellisessä esimerkissä, niin tässäkin symmetriaryhmä saadaan muodostettua aliryhmiensä tulona. Kaikki kierrot, eli normaalin aliryhmän C_3 alkiot saadaan yhdistämällä kuvaukset ryhmässä C_2 olevan neutraalialkion kanssa. Peilaukset taas saadaan yhdistämällä muut kuvaukset:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 e &= \sigma_1 \\
\sigma_1 \rho_1 &= \sigma_2 \\
\sigma_1 \rho_2 &= \sigma_3.
\end{aligned}
$$

Nyt siis pätee sekä $C_3C_2 = D_3$ että $C_3 \cap C_2 = \{e\}$, joten kolmion symmetriaryhmä on näiden aliryhmien sisäinen puolisuora tulo.

Kolmas yksinkertainen esimerkki sisäisestä puolisuorasta tulosta on alternoiva ryhmä

$$A_4 = \{e, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Tällä ryhmällä on normaalina aliryhmänä Kleinin neliryhmä V sekä aliryhmänä $H = \langle(123)\rangle = \{e, (123), (132)\}$. Tässä esimerkissä merkitään Kleinin neliryhmän alkioita neljällä A_4:n alkioilla: $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Tästä huomataan, että $V \cap H = \{e\}$, ja nyt täytyy enää osoittaa, että $VH = A_4$. Lähdetään tutkimaan H:n ja V:n alkioiden keskinäisiä permutaatioita:

$$(123)(12)(34) = (134)(2) = (134)$$

$$\begin{aligned}(123)(13)(24) &= (1)(324) = (243)\\ (123)(14)(23) &= (1)(421) = (142)\\ (132)(12)(34) &= (1)(234) = (234)\\ (132)(13)(24) &= (124)(3) = (124)\\ (132)(14)(23) &= (143)(2) = (143).\end{aligned}$$

Näin kahden aliryhmän permutaatioista saadaan muodostumaan myös loput A_4:n alkiot, joten $VH = A_4$ ja näin ollen A_4 on näiden kahden aliryhmän sisäinen puolisuora tulo.

Lause 4.2. *Jos G on aliryhmiensä N ja H sisäinen puolisuora tulo, niin kaikilla $g \in G$ on olemassa yksikäsitteiset $n \in N$ ja $h \in H$ siten, että $g = nh$.*

Todistus. Sisäisen puolisuoran tulon määritelmän mukaan $G = NH$, joten $g \in G$ on muotoa $g = nh$, joillain $n \in N$ ja $h \in H$. Oletetaan, että $n_1h_1 = n_2h_2$. Tällöin $n_2^{-1}n_1 = h_2h_1^{-1}$ ja tämä alkio kuuluu N:n ja H:n leikkaukseen, joka aiemman perusteella on G:n neutraalialkio: $N \cap H = \{e\}$. Tästä seuraa, että $n_2 = n_1$ ja $h_2 = h_1$. □

4.2 Ulkoinen puolisuora tulo

Seuraavaksi esitellään ulkoinen puolisuora tulo, joka on yleistys ulkoisesta suorasta tulosta. Puolisuoraa tuloa varten tarvitaan kaksi mitä tahansa ryhmää N ja H sekä kuvaus ryhmältä H ryhmälle, joka muodostuu N:n automorfismeista. Merkitään automorfismien ryhmää $Aut(N) = \{f : N \to N \mid f \text{ on automorfismi}\}$, jolloin saadaan kyseinen kuvaus

$\theta : H \to Aut(N)$. Näiden avulla saadaan muodostettua ryhmä $G = N \rtimes_\theta H$. Ulkoinen puolisuora tulo on joukkona kuin karteesinen tulo, eli järjestettyjen parien joukko $G = \{(n, h) \mid n \in N, h \in H\}$.

Määritelmä 4.3. Olkoon N ja H ryhmiä sekä kuvaus $\theta : H \to Aut(N)$ homomorfismi. Ryhmien N ja H *ulkoinen puolisuora tulo* on järjestettyjen parien joukko $N \times H = \{(n, h) \mid n \in N, h \in H\}$, siten, että näiden laskutoimitus $*$ on määritelty seuraavasti:

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2),$$

missä $\theta(h_1)(n_2) \in N$. Ulkoisesta puolisuorasta tulosta käytetään merkintää $G = N \rtimes_\theta H$. [4] [5]

Tarkistetaan seuraavaksi, että ulkoinen puolisuora tulo on todellakin ryhmä.

G0. Ensinnäkin ulkoinen puolisuora tulo on suljettu laskutoimituksen suhteen, koska $\theta(h_1) \in Aut(N)$, joten $\theta(h_1)(n_2) \in N$, samoin siis $n_1\theta(h_1)(n_2) \in N$. Lisäksi pätee selvästi, että $h_1h_2 \in H$. Näin ollen $(n_1, h_1) * (n_2, h_2) \in N \rtimes_\theta H$.

G1. Ulkoinen puolisuora tulo on liitännäinen, koska kaikilla $n_1, n_2, n_3 \in N$ ja $h_1, h_2, h_3 \in H$ pätee

$$\begin{aligned}[(n_1, h_1) * (n_2, h_2)] * (n_3, h_3) &= (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2) * (n_3, h_3)\\ &= [(n_1\theta(h_1(n_2))\theta(h_1h_2)(n_3), (h_1h_2)h_3].\end{aligned}$$

Kuvausten yhdiste $\theta(h_1h_2)$ voidaan kirjoittaa $\theta(h_1) * \theta(h_2)$, joten edellä oleva on

$$[n_1\theta(h_1)(n_2)\theta(h_1) * \theta(h_2)(n_3), h_1h_2h_3].$$

Nyt yhdistetään kuvaukset $\theta(h_1)$, jolloin saadaan

$$[n_1\theta(h_1)(n_2\theta(h_2)(n_3)), h_1h_2h_3],$$

mikä taas on

$$(n_1, h_1) * (n_2\theta(h_2)(n_3), h_2h_3)) = (n_1, h_1) * [(n_2, h_2) * (n_3, h_3)].$$

G2. Seuraavaksi todistetaan neutraalialkion olemassaolo. Ulkoisen puolisuoran tulon laskutoimituksen neutraalialkio on selvästi (e_N, e_H), koska

$$\begin{aligned}(n, h) * (e_N, e_H) &= (n\theta(h)(e_N), he_H) = (ne_N, h) = (n, h)\\ (e_N, e_H) * (n, h) &= (e_N\theta(e_H)(n), e_Hh) = (e_Nn, h) = (n, h).\end{aligned}$$

Ensimmäinen pätee siksi, että $\theta(h)$ on homomorfismi, joten se säilyttää laskutoimituksen neutraalialkion ja kuvaa siis e_N itsekseen. Jälkimmäinen pätee siksi, että kuvauksesta $\theta(e_H)$ tulee identiteettikuvaus ja se kuvaa alkion n itselleen.

G3. Käänteisalkion olemassaolo on hieman monimutkaisempi todistaa, sillä se on $(n,h)^{-1} = (\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$. Tarkistetaan, että mitä tahansa alkiota (n,h) oikealta puolelta operoitaessa saadaan ryhmän neutraalialkio:

$$(n,h) * (\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= (n\theta(h)(\theta(h^{-1})(n^{-1})), hh^{-1}) \\
&= (n\theta(h) \circ \theta(h^{-1})(n^{-1})), e_H) \\
&= (n\theta(hh^{-1})(n^{-1}), e_H) \\
&= (n\theta(e_H)(n^{-1}), e_H) \\
&= (nn^{-1}, e_H) = (e_N, e_H).
\end{aligned}$$

Tämä pätee myös toisin päin laskettaessa:

$$(\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}) * (n,h)$$

$$\begin{aligned}
&= (\theta(h^{-1})(n^{-1})\theta(h^{-1})(n), h^{-1}h) \\
&= (\theta(h^{-1})(n^{-1}n), e_H) \\
&= (\theta(h^{-1})(e_N), e_H) = (e_N, e_H).
\end{aligned}$$

Näin ollen ulkoisen puolisuoran tulon laskutoimituksen käänteisalkio on $(n,h)^{-1} = (\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$. Joten koska kaikki ryhmän ehdot on todistettu, niin ulkoinen puolisuora tulo on ryhmä.
□

Ulkoisen puolisuoran tulon määritelmän motivaationa voidaan käyttää sisäistä puolisuoraa tuloa, jonka laskutoimitus voidaan kirjoittaa auki seuraavasti: $(n_1h_1)(n_2h_2) = n_1h_1n_2h_2 = n_1h_1n_2(h_1^{-1}h_1)h_2 = n_1(h_1n_2h_1^{-1})h_1h_2$. Tässä nähdään nyt selvä yhteys ulkoisen puolisuoran tulon laskutoimitukseen, joka siis on $(n_1,h_1)*(n_2,h_2) = (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2)$. Suurimpana erona on termin $h_1n_2h_1^{-1}$ korvaaminen $\theta(h_1)(n_2)$.

Myös käänteisalkion motivaationa on sisäisen puolisuoran tulon HN käänteisalkiot, jotka muodostetaan $(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1} = (h^{-1}n^{-1}h)h^{-1}$. Yhtäläisyys on selvä, kun verrataan tätä ulkoisen puolisuoran tulon laskutoimitukseen sekä sen käänteisalkioon $\theta(h^{-1})(n^{-1})$.

Seuraavaksi tarkastellaan ulkoisen puolisuoran tulon muodostaman ryhmän G aliryhmiä. Löydämme kaksi selkeää ryhmää, jotka muistuttavat alkuperäisiä ryhmiä H ja N, joista G on rakennettu:

$$\widetilde{N} = \{(n, e_H)\} \mid n \in N\} \qquad \text{ja} \qquad \widetilde{H} = \{(e_N, h) \mid h \in H\}.[6]$$

Nämä aliryhmät ovat isomorfisia alkuperäisten N ja H kanssa. Todistetaan ensin, että kyse on tosiaan G:n aliryhmistä. Tähän otetaan avuksi kurssissa Algebra I todistettu aliryhmäkriteeri.

Lause 4.4. *Olkoon G ryhmä ja $H \subset G$. Silloin H on G:n aliryhmä, jos ja vain jos $H \neq \emptyset$ ja $ab^{-1} \in H$ kaikilla $a, b \in H$. [2] [3]*

Käsitellään ensin joukko $\widetilde{N} = \{(n, e_H)\} \mid n \in N\}$. Halutaan siis todistaa, että tämä on ulkoisen puolisuoran tulon G aliryhmä. Oletetaan, että G on ulkoinen puolisuora tulo $N \rtimes_\theta H$. Tällöin ulkoisen puolisuoran tulon määritelmän perusteella N on ryhmä.

Ensimmäisenä huomataan, että $\widetilde{N}$ ei ole tyhjä joukko, koska oletuksen perusteella myöskään N ei ole tyhjä joukko. Lisäksi kaikilla $\widetilde{N}$:n alkioilla pätee $(n, e_H) \in G$, joten $\widetilde{N} \subset G$. Tarkastellaan seuraavaksi kahden alkion välistä laskutoimitusta. Oletetaan, että $(n_1, e_H), (n_2, e_H) \in \widetilde{N}$. Tällöin saadaan

$$(n_1, e_H) * (n_2, e_H)^{-1} = (n_1, e_H) * (\theta(e_H)(n_2^{-1}), e_H^{-1}) = (n_1, e_H) * (n_2^{-1}, e_H)$$

$$= (n_1\theta(e_H)(n_2^{-1}), e_He_H) = (n_1n_2^{-1}, e_H).$$

Koska N on ryhmä, niin $n_1n_2^{-1} \in N$. Tällöin siis $(n_1n_2^{-1}, e_H) \in \widetilde{N}$, joten aliryhmäkriteerin perusteella $\widetilde{N} \leq G$.

Sitten todistetaan, että joukko $\widetilde{H} = \{(e_N, h) \mid h \in H\}$ on G:n aliryhmä. Oletetaan taas, että G on ulkoinen puolisuora tulo $N \rtimes_\theta H$. Tällöin ulkoisen puolisuoran tulon määritelmän perusteella H on ryhmä.

Koska H ei ole alkuperäisen oletuksen perusteella tyhjä joukko, niin ei ole myöskään $\widetilde{H}$. Kaikilla $\widetilde{H}$ alkioilla pätee $(e_N, h) \in G$, joten $\widetilde{H} \subset G$. Tarkastellaan nyt samalla tavalla $\widetilde{H}$:n alkioiden välistä laskutoimitusta, kuten tehtiin ylempänä $\widetilde{N}$:n alkioille. Oletetaan, että $(e_N, h_1), (e_N, h_2) \in \widetilde{H}$. Tällöin pätee

$$(e_N, h_1) * (e_N, h_2)^{-1} = (e_N, h_1) * (\theta(h_2^{-1})(e_N), h_2^{-1}) = (e_N, h_1) * (e_N, h_2^{-1})$$

$$= (e_N\theta(h_1)(e_N), h_1h_2^{-1}) = (e_N, h_1h_2^{-1}).$$

Koska H on ryhmä, niin $h_1h_2^{-1} \in H$. Tällöin siis $(e_N, h_1h_2^{-1}) \in \widetilde{H}$, joten jälleen aliryhmäkriteerin perusteella $\widetilde{H} \leq G$.

Näin ollen siis sekä $\widetilde{N}$ että $\widetilde{H}$ ovat puolisuoran tulon G aliryhmiä. Seuraavaksi todistetaan, että ryhmät $\widetilde{N}$ ja N ovat isomorfisia, ja että myös ryhmät $\widetilde{H}$ ja H ovat isomorfisia. Käsitellään ensin $\widetilde{N}$ ja N. Oletetaan taas, että G on ulkoinen puolisuora tulo $N \rtimes_\theta H$.

Olkoon kuvaus $f : N \to \widetilde{N}$ määritelty ehdolla $f(n) = (n, e_H)$. Tämä kuvaus on selvästi bijektio, koska se kuvaa jokaiselle maalijoukon alkiolle tasan yhden lähtöjoukon alkion. Kuvaus on myös homomorfismi, koska kaikilla $n_1, n_2 \in N$ ja $(n_1, e_H), (n_2, e_H) \in \widetilde{N}$ pätee

$$f(n_1) * f(n_2) = (n_1, e_H) * (n_2, e_H) = (n_1\theta(e_H)(n_2), e_H) = (n_1n_2, e_H) = f(n_1n_2).$$

Näin ollen ryhmät N ja $\widetilde{N}$ ovat isomorfiset.

Tehdään seuraavaksi samanlainen todistus aliryhmille H ja $\widetilde{H}$. Määritellään kuvaus $f' : H \to \widetilde{H}$ siten, että $f'(h) = (e_N, h)$. Tämä kuvaus on myöskin bijektio samasta syystä kuin edellä kuvauksen f tapauksessa. Tämäkin kuvaus on homomorfismi, koska kaikilla $h_1, h_2 \in H$ ja $(e_N, h_1), (e_N, h_2) \in \widetilde{N}$ pätee

$$f'(h_1) * f'(h_2) = (e_N, h_1) * (e_N, h_2) = (e_N\theta(h_1)(e_N), h_1h_2) = (e_N, h_1h_2) = f'(h_1h_2).$$

Näin ollen myös ryhmät H ja $\widetilde{H}$ ovat isomorfiset.

Esimerkkinä ulkoisesta puolisuorasta tulosta voidaan tarkastella kertalukujen 3 ja 4 syklisiä ryhmiä $N = \langle n \rangle = \{e_N, n, n^{-1}\}$ ja $H = \langle h \rangle = \{e_H, h, h^2, h^3\}$. Muodostaaksemme näistä ryhmistä ulkoisen puolisuoran tulon G, niin tarvitsemme homomorfismin $\theta : H \to Aut(N)$. Ryhmällä N on vain yksi epätriviaali automorfismi, $n \mapsto n^{-1}$, joten määritellään kuvaus $\theta(h)(n) = n^{-1}$. Näin muodostuu niin sanottu disyklinen 12 kertaluvun ryhmä $Dic_{12} = \{(n, h) \mid n \in N, h \in H\}$. [6]

Tällainen kertalukua 12 oleva disyklinen ryhmä esitetään yleensä muodossa $\langle a, b, c \mid a^3 = b^2 = c^2 = abc\rangle$. Näin muodostetun ryhmän Dic_{12} tapauksessa nämä alkiot ovat $(e_N, h^2), (n, h)$ ja (n^{-1}, h^3), koska pätee

$$(e_N, h^2)^3 = (n, h)^2 = (n^{-1}, h^3)^2 = (e_N, h^2) * (n, h) * (n^{-1}, h^3) = (e_N, h^2),$$

ja koska näistä kolmesta alkiosta saa muodostettua koko ryhmän. Näin ollen voidaan merkitä $Dic_{12} = \langle (e_N, h^2), (n, h), (n^{-1}, h^3) \mid (e_N, h^2)^3 = (n, h)^2 = (n^{-1}, h^3)^2 = (e_N, h^2) * (n, h) * (n^{-1}, h^3) \rangle$.

Puolisuorat tulot antavat tärkeän tavan rakentaa uusia ryhmiä. Palaamme tähän seuraavassa luvussa.

4.3 Ulkoisen ja sisäisen puolisuoran tulon yhteys

Todistimme siis äsken, että ulkoisella puolisuoralla tulolla $G = N \rtimes_\theta H$ on kaksi aliryhmää $\widetilde{N} = \{n, e_H\}$ ja $\widetilde{H} = \{e_N, H\}$, jotka ovat isomorfisia ryhmien N ja H kanssa, joista alunperin ulkoinen puolisuora tulo muodostettiin. Nyt kuitenkin huomataan ryhmien $\widetilde{N}$

ja $\widetilde{H}$ yhteys kappaleen alussa esitettyihin ulkoisen suoran tulon aliryhmiin, joita siellä merkittiin $\widetilde{G}$ ja $\widetilde{H}$. Näiden aliryhmien avulla taas päästiin käsiksi sisäisen puolisuoran tulon määritelmään, joten sisäisellä ja ulkoisella puolisuoralla tulolla on varmasti joku yhteys. Tutkitaan seuraavaksi tätä yhteyttä tarkemmin.

Oletetaan, että G on ulkoinen puolisuora tulo, $g \in G$, $(n, e_h) \in \widetilde{N}$ ja $(e_N, h) \in \widetilde{H}$. Tällöin pätee

$$g = (n, h) = (ne_N, h) = (n\theta(e_H)(e_N), h) = (n, e_H) * (e_N, h).$$

Jokainen $g \in G$ voidaan siis kirjoittaa normaalin aliryhmänsä $\widetilde{N}$ ja aliryhmänsä $\widetilde{H}$ alkioiden tulona, joten $G \subset \widetilde{N}\widetilde{H}$. Koska kyseessä on ryhmän G kaki aliryhmää, niin tällöin pätee myös, että $\widetilde{N}\widetilde{H} \subset G$. Näin ollen pätee, että $G = \widetilde{N}\widetilde{H}$, ja samalla on selvää, että $\widetilde{N} \cap \widetilde{H} = \{e_N, e_H\}$. Näyttääksemme, että G on aliryhmiensä $\widetilde{N}$ ja $\widetilde{H}$ sisäinen puolisuora tulo, on enää tarpeellista tarkistaa, onko $\widetilde{N}$ ryhmän G normaali aliryhmä. Tähän otetaan avuksi Algebra I kurssilla todistettu aliryhmän normaaliuskriteeri.

Lause 4.5. *Olkoon G ryhmä ja N sen aliryhmä. Aliryhmä N on normaali, jos ja vain jos $gng^{-1} \in N$ kaikilla $n \in N$ ja $g \in G$. Ehto voidaan ilmaista myös muodossa $gNg^{-1} \subset N$ kaikilla $g \in G$. [2] [3]*

Oletetaan, että $n, n' \in N$ ja $h \in H$, jolloin $(n, h) \in G$ ja $(n', e_H) \in \widetilde{N}$. Tällöin määritelmän mukaan $(n, h) * (n', e_H) * (n, h)^{-1}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$(n, h) * (n', e_H) * (\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}) = (n\theta(h)(n'), h) * (\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}),$$

joka on yhtä kuin

$$(n\theta(h)(n')\theta(h)\theta(h^{-1})(n^{-1}), e_H) = (n\theta(h)(n')n^{-1}, e_H) \in \widetilde{N}.$$

Näin ollen lauseen 4.5 ehto täyttyy, ja $\widetilde{N}$ on ulkoisen puolisuoran tulon G:n normaali aliryhmä. Tämä todistaa sen, että G on myös aliryhmiensä $\widetilde{N}$ ja $\widetilde{H}$ sisäinen puolisuora tulo, eli pätee $G = N \rtimes_\theta H = \widetilde{N} \rtimes \widetilde{H}$.

Tässä tapauksessa kyse ei kuitenkaan ole sisäisestä suorasta tulosta, sillä $\widetilde{H}$ ei ole välttämättä normaali aliryhmä.

Luku 5

Ulkoisten ja sisäisten suorien ja puolisuorien tulojen yhteys

Aiemmin on jo todettu, että sisäinen puolisuora tulo $N \rtimes H$ on sisäinen suora tulo NH, jos myös H on ryhmän G normaali aliryhmä. Sisäinen suora tulo taas on lauseen 3.6 mukaan isomorfinen ulkoisen suoran tulon kanssa.

Myös molemmilla ulkoisilla suorilla tuloilla on yhteys. Siinä erikoistapauksessa, että ulkoisen puolisuoran tulon $G = N \rtimes_\theta H$ laskutoimituksessa esiintyvä θ on valittu triviaaliksi homomorfismiksi, se kuvaa kaikki $h \in H$ identtiselle automorfismille id_N, ja siten kaikki $n \in N$ itsekseen. Tällöin ulkoisen puolisuoran laskutoimituksesta tulee kaikilla $n_1, n_2 \in N$ ja $h_1, h_2 \in H$ tuleekin

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2) = (n_1n_2, h_1h_2).$$

Huomataan, että tämä on suoraan ulkoisen suoran tulon laskutoimitus, joten tässä erikoistapauksessa G onkin ulkoinen suora tulo $N \times H$. Näin ollen ulkoinen puolisuora tulo on ulkoisen suoran tulon yleistys.

Ryhmälaajennusta käsiteltäessä todistetaan vielä, että ulkoinen ja sisäinen puolisuora tulot ovat isomorfisia (propositio 7.5).

Luku 6

Lyhyt eksakti jono

Oletetaan, että G, H ja K ovat ryhmiä, tällöin kahden kuvauksen α ja β jono

$$K \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H$$

on *eksakti* tai *eksakti G:ssä*, kun kuvauksen β kuva on sama kuin kuvauksen α ydin, eli $\mathrm{Im}\ \beta = \mathrm{Ker}\ \alpha$ [4] [5]. Toisin sanoen, jono on eksakti G:ssä, jos G:hen tulevan kuvauksen kuva on sama kuin G:stä lähtevän kuvauksen ydin.

Koska kuvausten yhdiste $\alpha \circ \beta$ on määritelty, niin siitä seuraa kaksi vaatimusta: yhdiste $\alpha \circ \beta$ on nollakuvaus ($\mathrm{Im}\ \beta \subset \mathrm{Ker}\ \alpha$); jokaisella $g \in G$, jolla $\alpha(g) = e_H$, on muoto $g = \beta(k)$ jollain $k \in K$ ($\mathrm{Im}\ \beta \supset \mathrm{Ker}\ \alpha$). Esimerkiksi jos jono $0 \to K \to G$ on eksakti K:ssa, niin se tarkoittaa, että $K \to G$ on monomorfismi eli injektiivinen homomorfismi. Vastaavasti $G \to H \to 0$ on eksakti H:ssä, jos ja vain jos $G \to H$ on epimorfismi, eli surjektiivinen homomorfismi.

Pidempi jono

$$G_0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow G_n$$

on eksakti jono kun se on eksakti G_i:ssä, $i = 1, \ldots, n-1$. Erityisesti muotoa

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 0$$

oleva eksakti jono on nimeltään *lyhyt eksakti jono*. Tämä jono on siis eksakti K:ssa, G:ssä ja H:ssa. Tässä tapauksessa eksaktius tarkoittaa, että kuvaus β on monomorfismi, että $\mathrm{Im}\ \beta = \mathrm{Ker}\ \alpha$, ja että kuvaus α on epimorfismi. Lyhyet eksaktit jonot ovat avainasemassa, kun lähdetään selvittämään ryhmälaajennusta.

Luku 7

Ryhmälaajennus

Tarkastellaan nyt lähemmin lyhyttä eksaktia jonoa, joka on samaa muotoa kuin edellisessä kappaleessa, eli

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1.$$

Eksaktius K:ssa tarkoittaa sitä, että β on injektiivinen homomorfismi eli monomorfismi. Eksaktius G:ssä taas tarkoittaa sitä, että $\operatorname{Im} \beta = \operatorname{Ker} \alpha$. Ja edelleen eksaktius H:ssa on yhtäpitävä sen kanssa, että α on surjektiivinen homomorfismi eli epimorfismi. Näistä kolmesta seuraa se, että $\beta K \lhd G$ ja että $G/\beta K \cong H$. Tästä voidaan päätellä, että mikä tahansa normaali aliryhmä $N \lhd G$ saa aikaan lyhyen eksaktin jonon, joka on muotoa $1 \to N \to G \to G/N \to 1$.

Määritelmä 7.1. Kun kyseessä on muotoa

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1$$

oleva lyhyt eksakti jono, niin keskimmäinen ryhmä G on ryhmän K *laajennus* ryhmällä H. [4] [5]

Määritelmä 7.2. Ryhmälaajennus

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & K \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r, "\alpha"] & H \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\gamma"] & 1 \end{tikzcd}$$

on *halkeava*, kun on olemassa homomorfismi $\gamma : H \to G$, siten että yhdistetty kuvaus on identtinen: $\alpha \circ \gamma = id_H$. [4] [5]

Kaksi ryhmälaajennusta G ja G', joilla on samanlaiset lyhyet eksaktit jonot samojen ryhmien K ja H kanssa, ovat *ekvivalentit*, jos on olemassa isomorfismi $\psi : G \cong G'$ siten, että seuraava kaavio kommutoi [4]:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "id_K"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "id_H"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r] & G' \arrow[r] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Määritelmä 7.3. Ryhmän G *keskus* $\mathbf{Z}(G)$ on joukko, jonka alkiot kommutoivat kaikkien ryhmän G alkioiden kanssa. Se on määritelty seuraavasti

$$\mathbf{Z}(G) = \{a \mid a \in G, ag = ga \;\forall\; g \in G\}.$$

Ryhmän keskus on aina abelin aliryhmä. [4]

Tästä seuraa esimerkiksi se, että ryhmä G on abelin ryhmä, jos ja vain jos se on oma keskuksensa.

Määritelmä 7.4. Ryhmälaajennus

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1.$$

on *keskeinen*, jos kuvauksen β kuva on ryhmän G keskuksessa $\mathbf{Z}(G)$ eli $Im\ \beta \subset \mathbf{Z}(G)$. [9]

Esimerkiksi ulkoinen suora tulo $G \times H$ on keskeinen ryhmälaajennus, jos G on Abelin ryhmä ja siihen liittää homomorfismit $g \mapsto (g, 1)$ ja $(g, h) \mapsto h$. Tämän laajennuksen lyhyt eksakti jono on muotoa

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{\beta} G \times H \rightleftarrows H \longrightarrow 1.$$

Tällöin pätee, että $Im\ \beta = G \rtimes \{e_H\} \subset \mathbf{Z}(G \times H)$. Kyseinen ryhmälaajennus myös halkeaa kuvauksella $h \mapsto (e_G, h)$. [4]

7.1 Ulkoinen puolisuora tulo ryhmälaajennuksena

Esimerkiksi ulkoinen suora tulo $G \times H$ on ryhmälaajennus, jos siihen liittää homomorfismit $g \mapsto (g, 1)$ ja $(g, h) \mapsto h$. Tämän laajennuksen lyhyt eksakti jono on muotoa

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G \times H \rightleftarrows H \longrightarrow 1,$$

ja se halkeaa kuvauksella $h \mapsto (e_G, h)$. [4]

Ulkoisen suoran tulon lisäksi myös jokainen ulkoinen puolisuora tulo voidaan esittää lyhyenä eksaktina jonona [4] :

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} N \rtimes_\theta H \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1.$$

Luvussa 4 todistimme, että ulkoisen puolisuoran tulon tapauksessa ryhmät N ja $\widetilde{N} = \{(n, e_H) \mid n \in N\}$ ovat isomorfiset, joten näin ollen kuvaus $\beta : N \to N \rtimes_\theta H$, $\beta(n) = (n, e_H)$ on homomorfismi. Myös kuvaus $\alpha : N \rtimes_\theta H \to H$ on homomorfismi, kun $\alpha(n, h) = h$, koska nyt homomorfiaehto toteutuu:

$$\alpha[(n_1, h_1) * (n_2, h_2)] = \alpha(n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2) = h_1h_2 = \alpha(n_1, h_1)\alpha(n_2, h_2).$$

Kyseinen jono on eksakti, koska kuvauksen β kuva on sama kuin kuvauksen α ydin: $Im\ \beta = \{(n, e_H) \mid n \in N\} = Ker\ \alpha$. Näin ulkoinen puolisuora tulo todella on ryhmälaajennus.

Tämä ryhmälaajennus myös halkeaa kuvauksella $\gamma : H \to N \rtimes_\theta H$, $\gamma(h) = (e_N, h)$. Luvussa 4 todistimme myöskin, että ryhmät H ja $\widetilde{H}$ ovat isomorfisia, ja koska tässä on kyse samanlaisesta tilanteesta sekä samanlaisesta kuvauksesta, niin kuvaus γ on homomorfismi. Lisäksi kuvauksille α ja γ pätee, että $\alpha \circ \gamma = id_H$, koska

$$\alpha \circ \gamma(h) = \alpha(\gamma(h)) = \alpha(e_N, h) = h.$$

Nyt siis meillä on olemassa homomorfinen kuvaus $\gamma : H \to N \rtimes_\theta H$, jolle pätee $\alpha \circ \gamma = id_H$. Näin ollen ulkoisen puolisuoran tulon muodostama ryhmälaajennus halkeaa.

Ulkoisen puolisuoran tulon tapauksessa käsiteltiin aiemmassa luvussa sen muodostaman ryhmän aliryhmiä $\widetilde{N} = (n, e_H)$ ja $\widetilde{H} = (e_N, h)$. Nyt ryhmälaajennuksen tapauksessa huomataan, että homomorfismin β kuva on $\widetilde{N}$ ja homomorfismin γ kuva on $\widetilde{H}$, eli $\widetilde{N} = \beta N$ ja $\widetilde{H} = \gamma H$. Luvussa 4 myös todettiin, että näiden aliryhmien leikkaus on ulkoisen puolisuoran tulon neutraalialkio $\widetilde{N} \cap \widetilde{H} = \{(e_N, e_H)\}$, ja että $\widetilde{N}\widetilde{H} = N \rtimes_\theta H$. Tästä huomiosta voidaan muotoilla seuraava tulos.

Propositio 7.5. *Jos ryhmä G on sisäinen puolisuora tulo, eli sillä on normaali aliryhmä N ja aliryhmä H siten, että $N \cap H = \{e\}$ ja $NH = G$, ja jos kuvaus $\theta : H \to Aut(N)$ on määritelty $\theta(h)(n) = hnh^{-1}$, niin kuvaus $f : N \rtimes_\theta H \to G$, $f(n, h) = nh$, on isomorfismi. [4]*

Todistus. Oletetaan, että ryhmä G on sisäinen puolisuora tulo, eli $N \lhd G$ ja $H \leq G$, ja että pätee $N \cap H = \{e\}$ ja $NH = G$.

Koska N on normaali aliryhmä, niin kaikilla $n \in N$ ja $h \in H$ pätee $hnh^{-1} \in N$. Näin ollen normaalin aliryhmän N alkioiden konjugointi aliryhmän H alkiolla on ryhmän N automorfismi. Merkitään tällaista automorfismia θ seuraavasti: $\theta(h)(n) = hnh^{-1}$.

On siis todistettava, että kuvaus $f : N \rtimes_\theta H \to G$, $f(n,h) = nh$ on isomorfismi. Aloitetaan todistamalla, että kyse on bijektiosta, jota varten ensin täytyy todistaa injektiivisyys. Väitteestä $f(n_1,h_1) = f(n_2,h_2)$ seuraa, että $n_1h_1 = n_2h_2$. Koska G on puolisuora tulo, niin aiemmin lauseen 4.2 mukaan kaikilla $g \in G$ on olemassa yksikäsitteiset $n \in N$ ja $h \in H$ siten, että $g = nh$. Näin ollen väitteestä $n_1h_1 = n_2h_2$ seuraa, että $n_1 = n_2$ ja $h_1 = h_2$. Nyt siis pätee myös $(n_1,h_1) = (n_2,h_2)$, ja siten kuvaus f on injektio.

Kuvaus f on myös surjektio, koska $Imf = \{nh \mid n \in N, h \in H\} = NH = G$. Koska kuvaus on sekä injektio että surjektio, niin se on bijektio. Nyt isomorfian todistamiseksi tarvitsee enää tarkistaa homomorfisuus, joka tehdään seuraavaksi.

Ryhmän G laskutoimitus voidaan kirjoittaa muotoon

$$(n_1h_1)(n_2h_2) = n_1(h_1n_2h_1^{-1})h_1h_2.$$

Verrataan tätä nyt ulkoisen puolisuoran tulon laskutoimitukseen, johon sovelletaan automorfismia $n \mapsto hnh^{-1}$:

$$(n_1,h_1) * (n_2,h_2) = (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2) = (n_1(h_1n_2h_1^{-1}), h_1h_2)$$

Nyt huomataan näiden kahden välinen yhteys, joten kuvauksen ϕ homomorfia on helppo todistaa:

$$f[(n_1,h_1)*(n_2,h_2)] = f[n_1(h_1n_2h_1^{-1}), h_1h_2] = n_1(h_1n_2h_1^{-1})h_1h_2 = (n_1h_1)(n_2h_2) = f(n_1,h_1)f(n_2,h_2).$$

Kuvaus $f(n,h) = nh$ siis säilyttää laskutoimituksen. Näin ollen kuvaus f on siis isomorfismi ja $G \cong N \rtimes_\theta H$. □

Yllä oleva propositio voidaan tiivistää oheisella kaaviolla

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "id_N"'] & N \rtimes_\theta H \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & G \arrow[r, "\pi"] & G/N \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Kaaviossa ylin rivi on ulkoisen puolisuoran tulon $N \rtimes_\theta H$ halkeava lyhyt eksakti jono, ja alarivi on ryhmän G lyhyt eksakti jono, jossa on mukana tämän tekijäryhmä G/N. Keskimmäisenä oleva pystysuora kuvaus f on lauseen isomorfinen kuvaus, ja oikealla oleva kuvaus $\psi : H \to G/N$. Osoitetaan seuraavaksi, että ψ on isomorfismi, kun $\psi(h) = hN$.

Oletetaan, että $h_1, h_2 \in H$. Nyt pätee

$$\psi(h_1)\psi(h_2) = h_1N \cdot h_2N = h_1h_2N = \psi(h_1h_2),$$

joten homomorfiaehto täyttyy ja kuvaus ψ on homomorfismi. Osoitetaan seuraavaksi, että kyseessä on myös bijektio ja aloitetaan injektiivisyyden todistamisesta. Oletetaan, että $\psi(h_1) = \psi(h_2)$. Tästä seuraa, että $h_1 N = h_2 N$. Nyt, koska proposition 7.5 oletuksen mukaan $N \cap H = \{e\}$, niin eri alkioihin liittyvät sivuluokat ovat samat jos kyseiset alkiot ovat samat. Näin ollen edellä olevasta seuraa, että $h_1 = h_2$, ja kuvaus ψ on siten injektiivinen.

Tutkitaan seuraavaksi, onko kyseessä myös surjektio. Kuvauken ψ kuva on $Im\ \psi = \{hN \mid h \in H\}$. Koska proposition 7.5 oletuksien mukaan pätee myös, että $G = NH$, niin tällöin saadaan muodostettua kaikkie ryhmän G sivuluokat: $G/N = \{gN \mid g \in G\} = \{hN \mid h \in H\}$. Näin ollen $Im\ \psi = G/N$, joten kuvaus ψ on injektiivisyyden lisäksi surjektio ja siten bijektio. Koska kyseessä on sekä bijektio että homomorfismi, niin kuvaus on isomorfismi eli $H \cong G/N$.

Nyt huomataan, että $\psi \circ \alpha(n,h) = \psi(h) = hN$ ja $\pi \circ f(n,h) = \pi(nh) = nhN$. Koska N on normaali aliryhmä, niin tämä voidaan edelleen kirjoittaa muotoon $nhN = nNh = Nh = hN$, joten pätee, että $\psi \circ \alpha = \pi \circ f$. Lisäksi myös $f \circ \beta(n) = f(n, e_H) = n$. Näin ollen alkioiden kuvautuminen ei riipu siitä, mitä kautta se kuvautuu, eli koko kaavio kommutoi. [4]

Koska koko kaavio kommutoi, niin myös alempi laajennus halkeaa. Haluttu halkaiseva homomorfinen kuvaus ryhmältä G/N ryhmälle G voidaan esittää myös kuvausten yhdisteellä $f \circ \gamma \circ \psi^{-1}$. Koska ψ on isomorfismi, niin sillä on olemassa jokin käänteiskuvaus $\psi^{-1} : G/N \to H$. Kuvaus $\gamma : H \to N \rtimes_\theta H$ taas on homomorfismi, ja lopulta kuvaus $f : N \rtimes_\theta H$ kuvaa alkiot ryhmälle G.

Propositio 7.6. *Olkoon*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r, "\alpha"] & H \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

kolmen ryhmän lyhyt eksakti jono. Tällöin on olemassa kuvaus $\gamma : H \to G$, joka halkaisee jonon, jos ja vain jos on olemassa homomorfismi $\theta : H \to Aut(N)$ ja isomorfismi $f : G \to N \rtimes_\theta H$, siten, että $f \circ \beta(n) = (n, e_H)$ ja $\alpha \circ f^{-1}(n,h) = h$. [5]

Todistus. $\Rightarrow$

Oletetaan, että on olemassa yllä kuvattu lyhyt eksakti jono, jonka halkaisee homomorfismi $\gamma : H \to G$. Halutaan siis ensin todistaa, etä on olemassa homomorfismi $\theta : H \to Aut(N)$ ja isomorfismi $f : G \to N \rtimes_\theta H$, siten, että $f \circ \beta(n) = (n, e_H)$ ja $\alpha \circ f^{-1}(n,h) = h$.

Todistetaan ensin, että on olemassa homomorfismi θ. Määritellään kuvaus $\theta : H \to Aut(N)$ seuraavasti

$$\theta(h)(n) = \beta^{-1}(\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})) \in N.$$

Osoitetaan, että tämä kuvaus on hyvin määritelty. Koska β on lyhyen eksaktin jonon määritelmän mukaan injektiivinen, niin β^{-1} on määritelty joukossa $Im\ \beta$. Lyhyen eksaktin jonon tapauksessa tiedetään, että $Im\ \beta = Ker\ (\alpha)$. Näin ollen täytyy osoittaa, että $\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1}) \in Ker(\alpha)$. Tarkastellaan siis tällaista tilannetta, jolloin

$$\alpha(\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})) = (\alpha \circ \gamma(h))(\alpha \circ \beta(n))(\alpha \circ \gamma(h^{-1})).$$

Koska kyseessä on halkeava lyhyt eksakti jono, niin määritelmän mukaan pätee $\alpha \circ \gamma = id_H$ ja $\alpha \circ \beta = e_H$. Näin ollen yllä olevasta saadaan

$$(id(h))(e_H)(id(h^{-1})) = he_Hh^{-1} = e_H.$$

Nyt tästä seuraa $\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1}) \in Ker\ (\alpha)$. Ja koska lyhyen eksaktin jonon määritelmän mukaan $Ker\ (\alpha) = Im\ \beta$, niin $\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1}) \in Im\ \beta$. Tästä seuraa, että kuvaus $\theta(h)$ on hyvin määritelty.

Kuvauksen θ tapauksessa täytyy vielä todistaa, että se on homomorfismi. Tämä pätee, koska se on määritelty homomorfisten kuvausten β, β^{-1} ja γ yhdisteenä.

Seuraavaksi todistetaan, että $G \cong N \rtimes_\theta H$, ja tätä varten määritellään kuvaus $f : G \to N \rtimes_\theta H$ seuraavasti

$$f(g) = (\beta^{-1}[g(\gamma \circ \alpha(g^{-1}))], \alpha(g)) \in N \rtimes_\theta H.$$

Tämä kuvaus on hyvin määritelty, koska järjestettyjen parien molemmat osat ovat yksikäsitteisiä. Kuvaus α on homomorfismi, joten $\alpha(g)$ on selvästi yksikäsitteinen. Kuten ylempänä, niin nytkin on osoitettava, että $g(\gamma \circ \alpha(g^{-1}))$ on kuvauksen β maalijoukossa:

$$\begin{aligned}\alpha[g(\gamma \circ \alpha(g^{-1}))] &= \alpha(g)\alpha \circ \gamma \circ \alpha(g^{-1}) = \alpha(g) id \circ \alpha(g^{-1}) \\ &= \alpha(g)\alpha(g^{-1}) = \alpha(gg^{-1}) = \alpha(e_G) = e_H.\end{aligned}$$

Näin ollen $g(\gamma \circ \alpha(g^{-1})) \in Ker\ (\alpha) = Im\ \beta$, ja kuvaus f on hyvin määritelty.

Aikaisemmin on määritelty ulkoisen puolisuoran tulon $N \rtimes_\theta H$ laskutoimitus seuraavasti $(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2)$. Koska halutaan todistaa, että kuvaus f on isomorfismi, niin ensin osoitetaan, että tämä on homomorfismi. Oletetaan, että $g_1, g_2 \in G$, tällöin

$$f(g_1) * f(g_2) = [\beta^{-1}[g_1(\gamma \circ \alpha(g_1^{-1}))], \alpha(g_1)] * [\beta^{-1}[g_2(\gamma \circ \alpha(g_2^{-1}))], \alpha(g_2)]$$

Ulkoisen puolisuoran tulon laskutoimituksella tästä saadaan

$$[\beta^{-1}[g_1(\gamma \circ \alpha(g_1^{-1}))]\theta(\alpha(g_1))\beta^{-1}[g_2(\gamma \circ \alpha(g_2^{-1}))], \alpha(g_1)\alpha(g_2)].$$

Koska tiedetään, että kuvaus α on homomorfismi, niin $\alpha(g_1)\alpha(g_2) = \alpha(g_1g_2)$. Edellisestä myös huomataan, että $\alpha(g_1) \in H$ ja $\beta^{-1}(g_2(\gamma \circ \alpha(g_2^{-1}))) \in N$, joten voimme soveltaa suoraan aiemmin määritettyä kuvausta $\theta(g)$, joka on $\theta(h)(n) = \beta^{-1}[\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})]$. Yllä oleva voidaan siis kirjoittaa edelleen muotoon

$$[\beta^{-1}[g_1(\gamma \circ \alpha(g_1^{-1}))]\beta^{-1}[\gamma \circ \alpha(g_1)\beta(\beta^{-1}(g_2(\gamma \circ \alpha(g_2^{-1})))\gamma(\alpha(g_1)^{-1}))], \alpha(g_1g_2)].$$

Kuvaus β ja sen käänteiskuvaus β^{-1} muodostavat yhdessä identiteettikuvauksen, joten tämä on edelleen

$$[\beta^{-1}[g_1(\gamma \circ \alpha(g_1^{-1}))]\beta^{-1}[\gamma \circ \alpha(g_1)g_2(\gamma \circ \alpha(g_2^{-1}))\gamma(\alpha(g_1)^{-1})], \alpha(g_1g_2)].$$

Nyt edellä olevassa on kaksi homomorfista kuvausta β^{-1}, niin nämä voidaan yhdistää seuraavasti

$$[\beta^{-1}[g_1\gamma \circ \alpha(g_1^{-1})\gamma \circ \alpha(g_1)g_2\gamma \circ \alpha(g_2^{-1})\gamma(\alpha(g_1)^{-1})], \alpha(g_1g_2)].$$

Avataan vielä termi $\gamma(\alpha(g_1)^{-1}) = \gamma \circ \alpha(g_1^{-1})$, jolloin tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$[\beta^{-1}[g_1\gamma \circ \alpha(g_1^{-1})\gamma \circ \alpha(g_1)g_2\gamma \circ \alpha(g_2^{-1})\gamma \circ \alpha(g_1^{-1})], \alpha(g_1g_2)].$$

Tässä huomataan, että voidaan yhdistää peräkkäiset yhdistetyt kuvaukset $\gamma \circ \alpha$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&[\beta^{-1}[g_1\gamma \circ \alpha(g_1^{-1}g_1)g_2\gamma \circ \alpha(g_2^{-1}g_1^{-1})], \alpha(g_1g_2)] \\
&= [\beta^{-1}[g_1\gamma \circ \alpha(e_G)g_2\gamma \circ \alpha((g_2g_1)^{-1})], \alpha(g_1g_2)]
\end{aligned}$$

Koska sekä α että γ ovat homomorfisia, niin ne säilyttävät neutraalialkion. Näin ollen saadaan $\gamma \circ \alpha(e_G) = \gamma(e_H) = e_G$, ja yllä oleva voidaan kirjoittaa muotoon

$$= [\beta^{-1}[g_1e_Gg_2\gamma \circ \alpha((g_2g_1)^{-1})], \alpha(g_1g_2)]$$

$$= [\beta^{-1}[g_1g_2\gamma \circ \alpha((g_2g_1)^{-1})], \alpha(g_1g_2)] = f(g_1g_2).$$

Näin ollen $f(g_1) * f(g_2) = f(g_1g_2)$, joten kuvaus f on homomorfismi.

Jotta voidaan todistaa kuvauksen f isomorfisuus, niin homomorfisuuden lisäksi täytyy vielä todistaa bijektiivisyys. Kuvaus f on bijektio, jos ja vain jos se on kääntyvä. Määritellään siis sen käänteiskuvaus $f^{-1} : N \rtimes_\theta H \to G$ siten, että $f^{-1}(n, h) = \beta(n)\gamma(h)$. Nyt näiden yhdistetystä kuvauksesta saadaan

$$\begin{aligned}
f^{-1} \circ f(g) &= f^{-1}(\beta^{-1}(g\gamma \circ \alpha(g^{-1})), \alpha(g)) \\
&= \beta[\beta^{-1}(g\gamma \circ \alpha(g^{-1}))]\gamma \circ \alpha(g) \\
&= g\gamma \circ \alpha(g^{-1})\gamma \circ \alpha(g)
\end{aligned}$$

$$= g\gamma \circ \alpha(g^{-1}g)$$
$$= g\gamma \circ \alpha(e_G)$$
$$= ge_G$$
$$= g,$$

Näin ollen siis pätee, että $f^{-1} \circ f = id_G$. Osoitetaan seuraavaksi, että myös $f \circ f^{-1} = id_{N \rtimes_\theta H}$.

$$f \circ f^{-1}(n, g) = f[\beta(n)\gamma(g)]$$
$$= [\beta^{-1}(\beta(n)\gamma(h)\gamma \circ \alpha[(\beta(n)\gamma(h))^{-1}]), \alpha(\beta(n)\gamma(h))].$$

Tarkastellaan ensin oikeanpuoleista termiä ja avataan sulkeet yhdistämällä kuvaukset, jolloin saadaan

$$\alpha(\beta(n)\gamma(h)) = \alpha \circ \beta(n)\alpha \circ \gamma(h).$$

Koska kyseessä on lyhyt eksakti jono, niin yhdistetty kuvaus $\alpha \circ \beta$ kuvaa kaikki H:n neutraalialkioksi. Koska todistuksen oletuksen mukaan sama lyhyt eksakti jono halkeaa kuvauksella γ, niin $\alpha \circ \gamma = Id_H$. Näin ollen oikeanpuoleisesta termistä saadaan $e_H h = h$.

Lähdetään seuraavaksi myös avaamaan vasemmanpuoleisia sulkeita yhdistämällä kuvauksia, jolloin saadaan $\gamma \circ \alpha[(\beta(n)\gamma(h))^{-1}] = \gamma \circ \alpha \circ \beta(n^{-1})\gamma \circ \alpha \circ \gamma(h^{-1}))$. Tarkastellaan ensin alkiota $\gamma \circ \alpha \circ \beta(n^{-1})$. Koska kyseessä on edelleen lyhyt eksakti jono, niin $Im\ \beta = Ker\ (\alpha)$. Tästä seuraa, että $\alpha \circ \beta(n^{-1}) = e_H$. Koska γ on homomorfismi, niin $\gamma(e_H) = e_G$. Näin ollen siis $\gamma \circ \alpha \circ \beta(n^{-1}) = e_G$.

Katsotaan seuraavaksi lähemmin alkiota $\gamma \circ \alpha \circ \gamma(h^{-1})$. Tämä saadaan kirjoitettua muotoon $\gamma(h^{-1})$, koska halkeavan lyhyen eksaktin jonon mukaan $\alpha \circ \gamma = Id_H$. Tästä kaikesta saadaan järjestetty pari kirjoitettua muotoon

$$[\beta^{-1}(\beta(n)\gamma(h)e_G\gamma(h^{-1})), h].$$

Koska kuvaus γ on homomorfismi, niin se säilyttää laskutoimituksen ja siten myös käänteisalkiot. Näin ollen h ja h^{-1} kuvautuvat toistensa käänteisalkioiksi. Eli $\gamma(h) = g'$ ja $\gamma(h^{-1}) = g'^{-1}$ jollain $g' \in G$. Tällöin $\gamma(h)e_G\gamma(h^{-1}) = g'e_G g'^{-1} = g'g'^{-1} = e_G$, ja yllä olevasta saadaan

$$[\beta^{-1}(\beta(n)e_G)), h] = (\beta^1 \circ \beta(n), h) = (n, h).$$

Nyt siis myös $f \circ f^{-1} = id_{N \rtimes_\theta H}$, joten kuvaus f on kääntyvä. Tämä todistaa, että se on bijektio, ja koska aiemmin todistettiin, että f on myös homomorfismi, niin siten se on isomorfismi. Näin ollen $G \cong N \rtimes_\theta H$.

Nyt täytyy enää todistaa lauseessa esitetyt väitteet siitä, että $f \circ \beta(n) = (n, e_H)$ ja $\alpha \circ f^{-1}(n, h) = h$. Aloitetaan ensimmäisestä:

$$f \circ \beta(n) = (\beta^{-1}(\beta(n)\gamma \circ \alpha(\beta(n)^{-1})), \alpha \circ \beta(n)).$$

Koska kyseessä on lyhyt eksakti jono, niin yhdistetty kuvaus $\alpha \circ \beta$ kuvaa joukon N alkiot joukon H neutraalialkioksi. Lisäksi aiemman kohdan todistuksessa juuri todistettiin, että $\gamma \circ \alpha \circ \beta(n^{-1}) = e_G$, joten tämä voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$(\beta^{-1}(\beta(n)e_G), e_H) = (\beta^{-1} \circ \beta(n), e_H) = (n, e_H).$$

Näin ollen siis ensimmäinen ehto $f \circ \beta(n) = (n, e_H)$ pätee.

Myös toinen ehto pitää paikkaansa:

$$\alpha \circ f^{-1}(n, h) = \alpha(\beta(n)\gamma(h)) = \alpha \circ \beta(n)\alpha \circ \gamma(h) = e_H id_H(h) = h.$$

Nyt on siis todistettu ensimmäinen osa propositiosta, eli jos on olemassa kuvauksen $\alpha : G \to H$ käänteiskuvaus $\gamma : H \to G$, niin tällöin on olemassa homomorfismi $\theta : H \to Aut(N)$ ja isomorfismi $f : G \to N \rtimes_\theta H$, siten, että $f \circ \beta(n) = (n, e_H)$ ja $\alpha \circ f^{-1}(n, h) = h$. Todistetaan seuraavaksi tämä toiseen suuntaan.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että on olemassa homomorfismi $\theta : H \to Aut(N)$ sekä isomorfismi $f : G \to N \rtimes_\theta H$ siten, että pätee $f \circ \beta(n) = (n, e_H)$ ja $\alpha \circ f^{-1}(n, h) = h$. Nyt halutaan todistaa, että on olemassa homomorfismi $\gamma : H \to G$, joka halkaisee lyhyen eksaktin jonon

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r, "\alpha"] & H \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Olkoon $\gamma : H \to G$ määritelty siten, että $\gamma(h) = f^{-1}(e_N, h)$. Todistetaan ensin, että kyseessä on homomorfinen kuvaus. Kaikilla $h, h' \in H$ pätee

$$\begin{aligned} \gamma(hh') = f^{-1}(e_N, hh') &= f^{-1}(e_N\theta(h)(e_N), hh') = f^{-1}((e_N, h) * (e_N, h')) \\ &= f^{-1}(e_N, h) \cdot f^{-1}(e_N, h') = \gamma(h) \cdot \gamma(h'). \end{aligned}$$

Näin ollen γ on homomorfismi.

Todistetaan seuraavaksi, että kuvaus γ halkaisee lyhyen eksakti jonon. Koska $\gamma(h) = f^{-1}(e_N, h)$, niin nyt pätee $\alpha \circ \gamma(h) = \alpha \circ f^{-1}(e_N, h)$. Oletuksen mukaan $\alpha \circ f^{-1}(n, h) = h$, joten tästä seuraa, että $\alpha \circ f^{-1}(e_N, h) = h$. Näin ollen $\alpha \circ \gamma(h) = h$, joten $\alpha \circ \gamma = id_H$, ja γ halkaise kyseisen lyhyen eksaktin jonon.

Nyt on siis todistettu, että lyhyen eksaktin jonon

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r, "\alpha"] & H \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

tapauksessa on olemassa kuvauksen $\alpha : G \to H$ käänteiskuvaus $\gamma : H \to G$, joka halkaisee jonon, jos ja vain jos on olemassa homomorfismi $\theta : H \to Aut(N)$ ja isomorfismi $f : G \to N \rtimes_\theta H$, siten, että $f \circ \beta(n) = (n, e_H)$ ja $\alpha \circ f^{-1}(n, h) = h$.

$\square$

Korollaari 7.7. *Jos G on ulkoinen puolisuora tulo $G \cong N \rtimes_\theta H$, niin tekijäryhmälle $G/\beta(N)$ pätee $G/\beta(N) \cong H$. [5]*

Todistus. Tarkastellaan proposition 7.6 tilannetta, jossa kyseessä on lyhyt eksakti jono

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r, "\alpha"] & H \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}
$$

Koska kuvaus α on homomorfismi, niin sen ydin $Ker\ (\alpha)$ on ryhmän G normaali aliryhmä. Nyt tämän ryhmälaajennuksen tapauksessa pätee, että $Im\ \beta = Ker(\alpha)$, joten $\beta(N) = Ker(\alpha)$. Näin ollen $\beta(N)$ on ryhmän G normaali aliryhmä, ja voidaan muodostaa tekijäryhmä $G/\beta(N)$.

Lyhyen eksaktin jonon tapauksessa kuvaus α on epimorfismi, eli surjektiivinen homomorfismi, ja tällöin pätee $Im\ (\alpha) = H$. Nyt halutun isomorfian todistamiseen tarvitaan vain homomorfialausetta, joka on todistettu kurssissa Algebra I.

Lause 7.8. *Olkoot G ja H ryhmiä, ja olkoon $f : G \to H$ homomorfismi. Tällöin $G/Ker\ (f) \cong Im\ f$.*

Isomorfismina toimii kuvaus $f' : G/Ker\ (f) \to Im\ f, \qquad gKer\ f \mapsto f(g)$.

Nyt meillä on tämän homomorfialauseen mukainen tilanne, sillä $\alpha : G \to H$ on homomorfismi, $\beta(N) = Ker\ (\alpha)$ ja $H = Im\ \alpha$. Näin ollen on olemassa isomorfia $G/\beta(N) \cong H$. $\square$

7.2 Esimerkkejä ryhmälaajennuksesta

Yksinkertainen esimerkki ryhmälaajennuksesta on syklinen ryhmä $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, joka on ryhmän $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ laajennus samalla ryhmällä $\mathbb{Z}_2$. Tämän laajennuksen lyhyt eksakti jono on muotoa

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Kuvaus $\beta : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ on homomorfismi, kun neutraalialkio kuvautuu itsekseen ja $\beta(1) = 2$. Tällöin laskutoimitus säilyy samana. Koska lyhyen eksaktin jonon tapauksessa $Im\ \beta = Ker(\alpha)$, niin $\alpha(0) = 0$ ja lisäksi $\alpha(2) = 0$. Tästä seuraa, että $1 \mapsto 1$ ja $3 \mapsto 1$, ja kuvaus $\alpha : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ on myös homomorfismi.

Jotta tämä ryhmälaajennus halkeaisi, niin täytyisi olla homomorfismi γ, jolle pätee, että $\alpha \circ \gamma = id_{\mathbb{Z}_2}$. Jotta kuvaus γ säilyttäisi laskutoimituksen ja olisi homomorfismi, niin tulisi olla, kuten kuvauksen β tapaukessa, että $1 \mapsto 2$. Tällöin kuitenkin $\alpha \circ \gamma(1) = \alpha(2) = 0$, joten $\alpha \circ \gamma \neq id_{\mathbb{Z}_2}$. Näin ollen kyseinen ryhmälaajennus ei halkea.

Sisäisen puolisuoran tulon kohdalla osoitimme, että syklinen ryhmä C_6 on aliryhmiensä C_3 ja C_2 sisäinen suora tulo. Tämä syklinen ryhmä C_6 on myös ryhmän C_3 laajennus ryhmällä C_2, jolloin lyhyt eksakti jono on muotoa [9]

$$1 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\beta} C_6 \xrightarrow{\alpha} C_2 \longrightarrow 1.$$

Tässä tapauksessa C_3 on ryhmän C_6 normaali aliryhmä [3], joten korollaarin 7.7 mukaan $C_6/C_3 \cong C_2$. Jos ryhmän C_6 virittää g, niin normaalin aliryhmän C_3 virittää g^2, ja $C_2 = \{e, g^3\}$. Nyt homomorfismi $\beta : C_3 \to C_6$ on määritelty $\beta(g^{2i}) = g^{2i}$, kun $i = 0, 1, 2$. Homomorfismi $\alpha : C_6 \to C_2$ taas on määritelty niin, että normaalin aliryhmän C_3 alkiot kuvautuvat neutraalialkioksi ja kaikki muut alkiolle g^3.

Kyseinen ryhmälaajennus myös halkeaa kuvauksella $\gamma : C_2 \to C_6$, kun tämä kuvaa kaikki alkiot itsekseen. Tällöin pätee, että $\alpha \circ \gamma = Id_{C_2}$.

Toinen ryhmä, joka voidaan muodostaa ryhmän C_3 laajennuksena ryhmällä C_2 on symmetrinen ryhmä S_3, joka on isomorfinen myöskin sisäisen puolisuoran tulon esimerkkinä esitellyn kolmion symmetriaryhmän eli diedriryhmän D_3 kanssa. Tässä tapauksessa merkitään ryhmää $C_3 = \langle (123) \rangle$, jolloin tämä on kyseisen diedriryhmän normaali aliryhmä. [9] Näin ollen ryhmät S_3 ja D_3 ovat ekvivalentit ja tämän laajennuksen lyhyt eksakti jono on muotoa

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & C_3 \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & S_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 1 \\
1 \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "\beta"] & D_3 \arrow[r, "\alpha"] & C_2 \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Alemman eli kolmion symmetriaryhmän tapauksessa homomorfismi β kuvaa syklisen ryhmät alkiot kolmion kierroille. Homomorfismi α taas kuvaa symmetriaryhmän kierrot neutraalialkioksi ja peilaukset ainoalle toiselle alkiolle $g^3 \in C_2$. Myös tämä laajennus halkeaa kuvauksella $\gamma : C_2 \to D_3$, kun neutraalialkio kuvataan 0 asteen kierrolle ja g mille tahansa peilaukselle.

Kolmion symmetriaryhmän lisäksi myös mikä tahansa muu säännöllisen monikulmion symmetriaryhmä on ryhmälaajennus. Merkitään jokaista luonnollista lukua n vastaavaa säännöllistä monikulmion symmetriaryhmää D_n. Diedriryhmä muodostuu $360°/n$ kierroista ρ sekä peilauksista σ, joita molempia on n kappaletta. Yhteensä ryhmässä siis on $2n$ alkiota ja se on muotoa $D_n = \{\rho_i, \sigma_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$. Neutraalialkio diedriryhmän tapauksessa on id, eli 0 asteen kierto.

Diedriryhmällä on aliryhmänä kierroista muodostuva kertalukua n oleva syklinen aliryhmä $C_n = \{\rho_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$. Toisena ryhmänä laajennuksessa on yhdestä peilauksesta sekä neutraalialkiosta koostuva ryhmä $\Sigma_2 = \{id, \sigma\}$. Myös tämä ryhmä on diedriryhmän aliryhmä, ja se on kertaluvun kaksi syklinen ryhmä. Diedriryhmän D_n laajennus on muotoa

$$1 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\beta} D_n \xrightarrow{\alpha} \Sigma_2 \longrightarrow 1.$$

Kuvaus $\beta : C_n \to D_n$ on identtinen kuvaus ja kuvaa siis kaikki kierrot itsekseen. Kuvaus $\alpha : D_n \to \Sigma_2$ on määritelty siten, että $\rho_i \mapsto id$ ja $\sigma_i \mapsto \sigma$. Tämä on homomorfismi, koska se säilyttää laskutoimituksen. Todistetaan tämä tarkastelemalla eri tilanteita. Jos diedriryhmässä D_n tehdään kaksi kiertoa peräkkäin, niin tulos on myös kierto. Nyt kuvauksen f kanssa tilanne näyttää tältä

$$f(\rho_1\rho_2) = f(\rho_3) = id = id\ id = f(\rho_1)f(\rho_2).$$

Jos kyseessä taas on kaksi peilausta, niin näiden yhdistäminen on myös joku kierto, joten homomorfiaehto toteutuu:

$$f(\sigma_1\sigma_2) = f(\rho') = id = \sigma\sigma = f(\sigma_1)f(\sigma_2).$$

Sitten taas tilanteessa, jossa tehdään ensin kierto ja sitten peilaus tai ensin peilaus ja sitten kierto, tuloksena on peilaus. Näin ollen homomorfiaehto toteutuu myös:

$$f(\rho_1\sigma_1) = f(\sigma') = \sigma = id\sigma = f(\rho_1)f(\sigma_1),$$

$$f(\sigma_1\rho_1) = f(\sigma') = \sigma = \sigma id = f(\sigma_1)f(\rho_1).$$

Diedriryhmän D_n ryhmälaajennus halkeaa kuvauksella $\gamma : \Sigma_2 \to D_n$, joka kuvaa alkiot itsekseen. Näin ollen $\alpha \circ \gamma = id_{\Sigma_2}$. [4]

Ryhmä C_n on isomorfinen syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_n$ kanssa ja samoin ryhmä Σ_2 on isomorfinen syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_2$ kanssa. Diedriryhmä D_n ei ole isomorfinen ulkoisen suoran tulon $C_n \times \Sigma_2$ kanssa, koska kyseinen ulkoinen suora tulo on vaihdannainen, kun taas diedriryhmä D_n ei ole. Kuitenkin edellisen proposition 7.6 mukaan diedriryhmä on isomorfinen näiden ulkoisen puolisuoran tulon kanssa, joten $D_n \cong C_n \rtimes_\theta \Sigma_2$. Tässä tapauksessa $\theta : \Sigma_2 \to Aut(C_n)$ on ryhmän C_n konjugointi ryhmän Σ_2 alkioilla.

Myös ulkoisen puolisuoran tulon esimerkkinä (sivu 17) tarkastelemamme disyklinen ryhmä $Dic_{12} = \langle (e_N, h^2), (n, h), (n^{-1}, h^3) \mid (e_N, h^2)^3 = (n, h)^2 = (n^{-1}, h^3)^2 = (e_N, h^2) * (n, h) * (n^{-1}, h^3) \rangle$ on ryhmälaajennus:

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} Dic_{12} \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} H \longrightarrow 1.$$

Tässä esimerkissä homomorfiset kuvaukset on määritelty kaikilla $n \in N$ ja $h \in H$ seuraavasti: $\beta(n) = (n, e_H)$ ja $\alpha(n, h) = h$. Tällöin pätee, että $Im\,\beta = \{(n, e_H) \mid n \in N\} = Ker\ (\alpha)$. Tämä ryhmälaajennus myös halkeaa kuvauksella $\gamma : H \to Dic_{12}$, $\gamma(h) = (e_N, h)$, koska nyt kuvausten α ja γ yhdiste on identtinen kuvaus, eli $\alpha \circ \gamma(h) = \alpha(e_N, h) = h$.

Kirjallisuutta

[1] I. Martin Isaacs: Algebra A Graduate Course, American Mathematical Society, 2009.

[2] Tauno Metsäkylä, Marjatta Näätänen: Algebra, 2. painos, Yliopistopaino, 2009.

[3] Jokke Häsä, Johanna Rämö: Johdatus Abstraktiin Algebraan, 3. painos, Gaudeamus Oy, HYY yhtymä, 2012.

[4] Saunders MacLane, Garrett Birkhoff: Algebra, 3rd edition, AMS Chelsea Publishing, 1999.

[5] Katsuo Kawakubo: The Theory of Transformation Groups, Oxford University Press, 1991.

[6] Derek J. S. Robinson: An Introduction to Abstract Algebra, Walter de Gruyter, 2003.

[7] Michael Artin: Algebra, 2nd edition, Pearson Education cop., 2014.

[8] I. N. Herstein: Abstract Algebra, 3rd edition, Prentice-Hall, 1996.

[9] Dietrich Burde: Cohomology of groups with applications to number theory, Lecture notes, 2009.